Proceedings of IAM, V.6, N.1, 2017, pp.109-122

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ЛИНЕЙНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

И.М. Гусейнов[1,2], А.Ф. Мамедова[3]

[1]Бакинский Государственный Университет, Баку, Азербайджан
[2]Институт Математики и Механики НАН Азербайджана
[3]Гянджинский Государственный Университет, Гянджа, Азербайджан
e-mail: hmhuseynovov@gmail.com

Резюме. Изучена обратная задача рассеяния для уравнения Шредингера с дополнительным линейным потенциалом. С помощью операторов преобразования построены решения с определенными асимптотиками на бесконечности. Изучены свойства коэффициента отражения. Получено основное уравнение обратной задачи. Доказана однозначная разрешимость основного уравнения.

Ключевые слова: уравнение Шредингера, линейный потенциал, операторы преобразования, коэффициент отражения, обратная задача рассеяния, основное уравнение.

AMS Subject Classification: 34A55, 34B24, 34L05.
.

1. Введение

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$-y''+[x+p(x)]y=\lambda y, \qquad -\infty<x<\infty \tag{1}$$

где действительная функция $p(x)$ непрерывно дифференцируема на всей оси и удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|)|p(x)|dx<\infty . \tag{2}$$

Уравнение такого типа возникает как квантовомеханический оператор энергии электрона в кристалле, помещенном во внешнее однородное электрическое поле (см. $[5]$ и литературу в ней). При отсутствии линейного потенциала, т.е. для уравнения $-y''+p(x)y=\lambda y$ с быстроубывающим потенциалом $p(x)$ обратная задача рассеяния детально изучалась в работах многих авторов (см.[8,11,12] и литературу в них). С другой стороны, в работах [3,7] для уравнения (1) исследовались обратные задачи по некоторым спектральным данным. Настоящая работа посвящена обратной задаче рассеяния уравнения (1).

В данной работе построены операторы преобразования с условиями на бесконечности, переводящие решения невозмущенного уравнения

$$-y'' + xy = \lambda y, \tag{3}$$

в решения возмущенного уравнения (1). Изучены прямая и обратная задачи рассеяния. Получено основное уравнение обратной задачи. Доказана его однозначная разрешимость. Указан алгоритм решения обратной задачи рассеяния.

Наличие дополнительного линейного потенциала приводит к нарушению некоторых свойств коэффициента отражения. Это обстоятельство и более сложная структура решений невозмущенного уравнения потребовали значительной модификации классических рассуждений из работ [8,11,12].

Заметим, что обратные задача рассеяния для уравнения Шредингера с дополнительным линейным потенциалом на полуоси исследовалась в работе [1]. Подобная задача для уравнения Шредингера с дополнительным ангармоническим потенциалом рассматривалась в работе [6]. Некоторые спектральные свойства дифференциального оператора второго порядка с потенциалом cx^{α} изучались в работах [2,9].

2. Операторы преобразования

Рассмотрим функцию $k(\lambda) = \sqrt{\lambda - x}$, выбирая аналитическую ветвь радикала такую, что $\sqrt{\lambda - x} > 0$ при $\lambda - x > 0$. Известно [4,10], что функции

$$\sqrt{\lambda - x}\, H^{(j)}_{1/3}\left(\frac{2}{3}(\lambda - x)^{\frac{3}{2}}\right), \; j = 1,2$$

являются решениями уравнения (3), где $H^{(1)}_{1/3}(Z), H^{(2)}_{1/3}(Z)$ - функции Ганкеля первого и второго рода соответственно. Как показано в [10], функция $H^{(1)}_{1/3}(Z)$ содержит множитель

$$e^{iZ} = \exp\left\{\frac{2i}{3}(\lambda - x)^{\frac{3}{2}}\right\} = \exp\left\{\frac{2i}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}\left(1 - \frac{\lambda}{x} + \ldots\right)\right\},$$

который для всех λ, $\operatorname{Im}\lambda > 0$ экспоненциально убывает при $x \to -\infty$. С другой стороны, решениями уравнения (3) являются также функции Эйри $Ai(x - \lambda), Bi(x - \lambda)$, которые линейно незавсимы. Эти решения связаны равенствами

$$\sqrt{\lambda - x}\, H^{(j)}_{1/3}\left(\frac{2}{3}(\lambda - x)^{\frac{3}{2}}\right) = e^{\mp\frac{\pi i}{6}}\sqrt{3}\left[Ai(x - \lambda) \mp iBi(x - \lambda)\right], \; j = 1,2 .$$

Введем обозначения

$$\sigma^{\pm}(x) = \pm\int_x^{\pm\infty} |p(x)|(x)dx\,,\ \sigma_1^{\pm}(x) = \pm\int_x^{\pm\infty} \sigma^{\pm}(x)dx\,. \tag{4}$$

Ищем решение уравнения (1) в виде

$$f(x,\lambda) = f_0^+(x,\lambda) + \int_x^{\infty} K(x,t) f_0^+(t,\lambda)dt\,, \tag{5}$$

где

$$f_0^+(x,\lambda) = \sqrt{\pi}Ai(x-\lambda).$$

Аналогично тому, как это было сделано в работах [1,3,6], можно доказать, что функция (5) заведомо удовлетворяет уравнению (1), если только ядро $K(x,t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} + (t-x)K(x,t) = -K(x,t)p(t) \tag{6}$$

и условиям

$$K(x,x) = \frac{1}{2}\int_x^{\infty} p(\alpha)d\alpha, \lim_{x+t\to\infty} K(x,t) = 0\,. \tag{7}$$

Сведем задачу (5), (7) к интегральному уравнению. Введем новые переменные ξ,η по формулам $\dfrac{t+x}{2} = \xi,\ \dfrac{t-x}{2} = \eta$.

Тогда задача (6), (7) примет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 U(\xi,\eta)}{\partial\xi\partial\eta} - 2\eta U(\xi,\eta) = U(\xi,\eta)\,p(\xi+\eta)\,, \tag{8}$$

$$U(\xi,0) = \frac{1}{2}\int_{\xi}^{\infty} p(\alpha)d\alpha$$

$$\lim_{\xi\to\infty} U(\xi,\eta) = 0 \text{ при каждом } \eta > 0\,, \tag{9}$$

где $U(\xi,\eta) = K(\xi-\eta,\xi+\eta)$.

Введем функцию Римана $R(\xi,\eta,\xi_0,\eta_0)$ уравнения (8), т.е. функцию, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 R}{\partial\xi\partial\eta} - 2\eta R = 0, 0 < \eta < \eta_o, \xi_0 < \xi < \infty\,. \tag{10}$$

и условиям на характеристиках

$$R(\xi,\eta,\xi_0,\eta_0)\big|_{\xi=\xi_0}=1, \quad 0\le\eta\le\eta_0,$$
$$R(\xi,\eta,\xi_0,\eta_0)\big|_{\eta=\eta_0}=1, \quad \xi_0\le\xi<\infty. \tag{11}$$

Применяя метод Римана к задаче (8), (9), получим

$$U(\xi_0,\eta_0)=\frac{1}{2}\int_{\xi_0}^{\infty}R(\xi,\eta_0,\xi_0,\eta_0)p(\xi)d\xi+\int_{\xi_0}^{\infty}d\xi\int_0^{\eta_0}U(\xi,\eta)\,p(\xi+\eta)R(\xi,\eta,\xi_0,\eta_0)$$

или же в силу (8)

$$U(\xi_0,\eta_0)=\frac{1}{2}\int_{\xi_0}^{\infty}p(\xi)d\xi+\int_{\xi_0}^{\infty}d\xi\int_0^{\eta_0}U(\xi,\eta)\,p(\xi+\eta)R(\xi,\eta,\xi_0,\eta_0). \tag{12}$$

Таким образом, для решения задачи (8), (9) достаточно решить относительно $U(\xi_0,\eta_0)$ интегральное уравнение (12).

Для исследования интегрального уравнения (12) надо найти явный вид функции $R(\xi,\eta,\xi_0,\eta_0)$, которая является решением задачи (10), (11). Следуя соответствующим рассуждениям из работ [1,6], положим

$$z=2\sqrt{\left(\eta_0^2-\eta^2\right)\left(\xi-\xi_0\right)}$$

и вводим функцию Бесселя

$$R\left(\xi,\eta,\xi_0,\eta_0\right)=J_0\left(z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{\left(n!\right)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}. \tag{13}$$

Легко показать, что функция (13) служит решением задачи (10), (11) и удовлетворяет соотношениям

$$R\left(\xi,\eta,\xi_0,\eta_0\right)=R\left(\xi_0,\eta_0,\xi,\eta\right).$$
$$\left|R(\xi,\eta,\xi_0,\eta_0)\right|\le 1.$$

Теорема 1. Пусть непрерывно дифференцируемая функция $p(x)$ удовлетворяет условию (2). Тогда интегральное уравнение (12) имеет единственное решение $U\left(\xi_0,\eta_0\right)$ и имеет место оценка

$$\left|U\left(\xi_0,\eta_0\right)\right|\le\frac{1}{2}\sigma\left(\xi_0\right)\exp\sigma_1\left(\xi_0\right). \tag{14}$$

Доказательство. Пользуемся методом последовательных приближений. С этой целью положим

$$U_0(\xi_0,\eta_0)=\frac{1}{2}\int_{\xi_0}^{\infty}p(\xi)d\xi ,$$

$$U_n(\xi_0,\eta_0)=\int_{\xi_0}^{\infty}d\xi\int_0^{\eta_0}p(\xi+\eta)R(\xi,\eta,\xi_0,\eta_0)U_{n-1}(\xi,\eta)d\eta,$$

и ищем решение уравнения (12) в виде

$$U(\xi_0,\eta_0)=\sum_{n=0}^{\infty}U_n(\xi_0,\eta_0).$$

Из последних равенств следует, что

$$|U_0(\xi_0,\eta_0)|\le\frac{1}{2}\int_{\xi_0}^{\infty}|p(\xi)|d\xi,$$

$$|U_1(\xi_0,\eta_0)|\le\int_{\xi_0}^{\infty}d\xi\int_0^{\eta_0}|p(\xi+\eta)R(\xi,\eta,\xi_0,\eta_0)U_0(\xi,\eta)|d\eta\le$$

$$\le\frac{1}{2}\sigma(\xi_0)\int_{\xi_0}^{\infty}d\xi\int_0^{\eta_0}|p(\xi+\eta)|d\eta\le \quad ,$$

$$\le\ \frac{1}{2}\sigma(\xi_0)\int_{\xi_0}^{\infty}d\xi\int_{\xi}^{\infty}|p(s)|ds=\frac{1}{2}\sigma(\xi_0)\int_{\xi_0}^{\infty}\sigma(\xi)d\xi=\frac{1}{2}\sigma(\xi_0)\sigma_1(\xi_0)$$

Пусть теперь $|U_{n-1}(\xi_0,\eta_0)|\le\frac{1}{2}\sigma(\xi_0)\frac{\sigma_1^{n-1}(\xi_0)}{(n-1)!}$. Тогда будем иметь

$$|U_n(\xi_0,\eta_0)|\le\int_{\xi_0}^{\infty}d\xi\int_0^{\eta_0}|p(\xi+\eta)R(\xi,\eta,\xi_0,\eta_0)U_{n-1}(\xi,\eta)|d\eta\le \quad ,$$

$$\frac{1}{2}\sigma(\xi_0)\frac{1}{2}\int_{\xi_0}^{\infty}\frac{\sigma_1^{n-1}(\xi)}{(n-1)!}d\sigma_1(\xi)\le\frac{1}{2}\sigma(\xi_0)\frac{\sigma_1^{n}(\xi_0)}{n!}$$

Откуда, очевидно, следует, что ряд $U(\xi_0,\eta_0)=\sum_{n=0}^{\infty}U_n(\xi_0,\eta_0)$ сходится, а его сумма $U(\xi_0,\eta_0)$ удовлетворяет неравенству (14) и является решением уравнения (12).

Теорема доказана.

Следовательно, функция $K(x,t)=U\left(\frac{t+x}{2},\frac{t-x}{2}\right)$ дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет задаче (6), (7).

Таким образом, нами доказана следующая теорема:

Теорема 2. Пусть функция $p(x)$ непрерывно дифференцируема на оси $-\infty < x < \infty$ и удовлетворяет условию (2). Тогда при всех λ уравнение (1) имеет решение $f_+(x,\lambda)$, представимое в виде

$$f_+(x,\lambda) = f_0^+(x,\lambda) + \int_x^{\infty} K^+(x,t)\, f_0^+(t,\lambda)dt. \tag{15}$$

Для ядра $K^+(x,t)$ имеют место соотношения

$$\left|K^+(x,t)\right| \le \frac{1}{2}\sigma^+(\frac{x+t}{2})e^{\sigma_1^+(\frac{x+t}{2})}, \tag{16}$$

$$K^+(x,x) = \frac{1}{2}\int_x^{\infty} p(t)dt. \tag{17}$$

Вводим теперь функцию

$$f_0^-(x,\lambda) = \sqrt{\pi}\left[Ai(x-\lambda) - iBi(x-\lambda)\right],$$

являющуюся решением уравнения (3). Как отмечалось выше, это решение для всех λ, $\operatorname{Im}\lambda > 0$ экспоненциально убывает при $x \to -\infty$.

Теорема 3. Пусть функция $p(x)$ непрерывно дифференцируема на оси $-\infty < x < \infty$ и удовлетворяет условию (2). Тогда при всех $\lambda, \operatorname{Im}\lambda \ge 0$ уравнение (1) имеет решение $f_-(x,\lambda)$, представимое в виде

$$f_-(x,\lambda) = f_0^-(x,\lambda) + \int_{-\infty}^{x} K^-(x,t)\, f_0^-(t,\lambda)dt. \tag{18}$$

Для ядра $K^-(x,t)$ имеют место соотношения

$$\left|K^-(x,t)\right| \le \frac{1}{2}\sigma^-(\frac{x+t}{2})e^{\sigma_1^-(\frac{x+t}{2})}, \tag{19}$$

$$K^-(x,x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} p(t)dt. \tag{20}$$

Доказательство теоремы дословно повторяет доказательство теоремы 2.

Замечание. Известно $[4]$, что решения $f_0^+(x,\lambda)$, $f_0^-(x,\lambda)$ линейно независимы при всех λ и их вронскиан равен $-i$. Более того (см. $[10]$, гл. IV), для решений $f_0^+(x,\lambda)$, $f_0^-(x,\lambda)$ справедлива следующая формула разложения

$$f(x) = -\frac{1}{i\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x,\lambda)d\lambda,$$

где

$$\Phi(x,\lambda) = -if_0^+(x,\lambda)\int_{-\infty}^{x} f_0^-(y,\lambda)f(y)dy - i f_0^-(x,\lambda)\int_{x}^{\infty} f_0^+(y,\lambda)f(y)dy .$$

С помощью последнего равенства легко устанавливается следующие формулы разложения

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Ai(x-\lambda)Ai(y-\lambda)d\lambda = \delta(x-y),$$
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_0^+(x,\lambda)f_0^-(y,\lambda)d\lambda = \delta(x-y). \tag{21}$$

где δ - дельта функция Дирака.

3. Обратная задача рассеяния

Рассмотрим теперь частные решения невозмущенного уравнения (3). Заметим, что при вещественных значениях λ решением уравнения (3) является также $\overline{f_0^-(x,\lambda)}$. С другой стороны, известно, что функции $Ai(z), Bi(z)$ линейно независимы при всех z и их вронскиан $W[\mathrm{Ai}(z), \mathrm{Bi}(z)]$ равен $\frac{1}{\pi}$. Так как вронскиан двух решений от x не зависит, то решения $f_0^-(x,\lambda)$ и $\overline{f_0^-(x,\lambda)}$ также линейно независимы и верно равенство

$$W\left[f_0^-(x,\lambda), \overline{f_0^-(x,\lambda)}\right] = 2i .$$

Воспользовавшись тогда соотношениями (15),(16), (18), (19) найдем, что при действительных значениях λ пары решений $\left\{f_-(x,\lambda), \overline{f_-(x,\lambda)}\right\}$ образуют фундаментальную систему решений невозмущенного уравнения (1), причем справедливы равенства

$$W\left[f_-(x,\lambda), \overline{f_-(x,\lambda)}\right] = 2i . \tag{22}$$

Поэтому, при всех действительных значениях λ имеет место разложения

$$f_+(x,\lambda) = a(\lambda)\overline{f_-(x,\lambda)} + \overline{a(\lambda)}f_-(x,\lambda) \quad , \tag{23}$$

где

$$a(\lambda) = \frac{W[f_-(x,\lambda), f_+(x,\lambda)]}{2i}. \tag{24}$$

Из (22)-(23) вытекает, что функция $a(\lambda)$ непрерывна на вещественной оси и допускает аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость $\mathrm{Im}\lambda > 0$. Воспользовавшись соотношениями (15),(16), (18), (19), (24) легко усмотреть асимптотическое равенство

$$a(\lambda)=\frac{1}{2}+O\left(|\lambda|^{-\frac{1}{2}}\right), \lambda \to \infty . \qquad (25)$$

Далее, в силу (23), функция $a(\lambda)$ не обращается в нуль при вещественных значениях λ. Более того, функция $a(\lambda)$ не имеют нулей в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda > 0$, поскольку в противном случае порожденный уравнением (1) самосопряженный оператор имел бы комплексное собственное значение. Разложение (23) и оценки (18), (19) показывают, что последний оператор не имеет собственных значений и на действительной оси. При помощи формул разложения, приведенных в конце предыдущего пункта, можно доказать, что непрерывный спектр этого оператора заполняет всю действительную ось.

Функции, которые определяются формулами $r(\lambda)=\frac{\overline{a(\lambda)}}{a(\lambda)}, t(\lambda)=\frac{1}{a(\lambda)}$, называются коэффициентом отражения и коэффициентом прохождения уравнения (1), соответственно. Обратная задача рассеяния для уравнения (1) состоит в восстановлении коэффициента $p(x)$ по коэффициенту отражения. Из указанных выше свойств функции $a(\lambda)$ вытекает, что коэффициент отражения удовлетворяет следующему условию:

I. Коэффициенты отражения непрерывен на всей вещественной оси и удовлетворяет соотношениям

$$|r(\lambda)|=1, r(\lambda)=1+O\left(|\lambda|^{-\frac{1}{2}}\right), \lambda \to \infty . \qquad (26)$$

Следует отметить, что коэффициент прохождение однозначно определяется коэффициентом отражение . В самом деле, по образцу [3] имеем

$$a(z)=\exp\left\{-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\arg r(\lambda)}{\lambda-z}d\lambda\right\} \ (\operatorname{Im} z>0). \qquad (27)$$

При решении обратной задачи особое место занимают так называемые основные уравнения типа Марченко. Введем в рассмотрение функции

$$F^{+}(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\left|\frac{t(\lambda)}{2}\right|^{2}-1\right)f_0^{+}(x,\lambda)f_0^{+}(y,\lambda)d\lambda . \qquad (28)$$

При этом перечисленные выше свойства функций $f_0^{\pm}(x,\lambda)$ и $a(\lambda)$ обеспечивают существование интеграла (28). В самом деле, имеем:

$$f_0^+(x,\lambda) \sim \frac{1}{2}|\lambda|^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{2}{3}|\lambda|^{\frac{3}{2}}\right), \lambda \to -\infty,$$

$$f_0^-(x,\lambda) \sim c|\lambda|^{-\frac{1}{4}}\left(e^{\frac{i\pi}{6}} e^{\frac{2i}{3}\lambda^{\frac{3}{2}}} + e^{-\frac{i\pi}{6}} e^{-\frac{2i}{3}\lambda^{\frac{3}{2}}}\right), \lambda \to +\infty.$$

Тогда в силу (25), интеграл из (28) заведомо сходится в окрестности $-\infty$. В окрестности $+\infty$ этот интеграл ведет себя как преобразование Фурье некоторой функции из пространства $L_2(-\infty, a)$.

Теорема 4. При каждом фиксированном x; функция $K^+(x,y)$, входящая в представление (15), удовлетворяют интегральным уравнениям

$$F^+(x,y) + K^+(x,y) + \int_x^\infty K^+(x,t) F^+(t,y)\,dt = 0, y > x. \tag{29}$$

Доказательство. Аналогично формулам (21) находим, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a(\lambda)} f_+(x,\lambda) f_-(y,\lambda)\,d\lambda = \delta(x-y).$$

Отсюда в силу (23) имеем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|2a(\lambda)|^2} f_+(x,\lambda) f_+(y,\lambda)\,d\lambda = \delta(x-y).$$

Из известных свойств операторов преобразования и из (15), (16) вытекает, что

$$f_0^+(y,\lambda) = f_+(y,\lambda) + \int_y^\infty K(y,t) f_+(t,\lambda)\,dt,$$

где ядро $K(y,t)$ удовлетворяет неравенству, аналогичному (16). Из последних двух равенств имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|2a(\lambda)|^2} f_+(x,\lambda) f_0^+(y,\lambda)\,d\lambda &= \delta(x-y) + \int_y^\infty K(y,t)\delta(x-t)\,dt = \\ &= \delta(x-y) + K(y,x) = \delta(x-y). \end{aligned} \tag{30}$$

Далее, из (15), (30) следует, что

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|2a(\lambda)|^2}\,f_+(x,\lambda)f_0^+(y,\lambda)d\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|2a(\lambda)|^2}\,f_0^+(x,\lambda)f_0^+(y,\lambda)d\lambda+$$

$$+\int_x^{\infty}K^+(x,t)\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|2a(\lambda)|^2}\,f_+(t,\lambda)f_0^+(y,\lambda)d\lambda\right)dt.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|2a(\lambda)|^2}\,f_0^+(x,\lambda)f_0^+(y,\lambda)d\lambda+$$

$$+\int_x^{\infty}K^+(x,t)\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|2a(\lambda)|^2}\,f_+(t,\lambda)f_0^+(y,\lambda)d\lambda\right)dt=\delta(x-y).$$

С другой стороны, из (21) имеем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f_+(x,\lambda)f_0^+(y,\lambda)d\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f_0^+(x,\lambda)f_0^+(y,\lambda)d\lambda+$$

$$+\int_x^{\infty}K^+(x,t)\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f_0^+(t,\lambda)f_0^+(y,\lambda)d\lambda\right)dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f_0^+(x,\lambda)f_0^+(y,\lambda)d\lambda+\int_x^{\infty}K^+(x,t)\delta(t-y)dt=$$

$$=\delta(x-y)-K^+(x,y).$$

Сопоставляя теперь последнее равенство предпоследним равенством, получим (29).

Теорема доказана.

Исследуем теперь свойства функции $F^+(x,y)$ при помощи основного уравнения (29). Будем иметь:

$$F^+(x,y)=-K^+(x,y)+\int_x^{\infty}K^+(x,t)F^+(t,y)dt\,.$$

Пользуясь последним соотношением, получим, что функция $F^+(x,y)$ непрерывна по совокупности аргументов. Более того, применив лемму Гроноулля с учетом оценки (16) найдем, что при к $x\ge a$, где a - фиксированное число, имеют место неравенства

$$\left|F^+(x,y)\right|\le C^+(a)\sigma^+\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Поскольку функция $F^{+}(x,y)$ является симметричной относительно своих аргументов, из последних оценок вытекает следующее свойство:

II. Функция $F^{+}(x,y)$ непрерывна и при каждом фиксированном a удовлетворяют соотношениям

$$\left|F^{+}(x,y)\right| \le C(a),\, x \ge a,\, y \ge a,\, \left|\int_a^\infty \sup_{x>a}\left|F^{+}(x,t)\right| dt\right| < \infty .$$

Теорема 5. Пусть выполняются условия I-II. Тогда при каждом фиксированном x уравнение (29) имеет единственное решение $K^{+}(x.\cdot) \in L_p(x,\infty)$,($p=1,2$).

Доказательство. Заметим, прежде всего, что в силу условия I уравнение (29) порождается вполне непрерывным оператором в пространстве $L_p(x,\infty)$, ($p=1,2$).Согласно альтернативе Фредгольма, искомое решение уравнения (29) существует и единственно в пространстве $L_p(x,\infty)$,($p=1,2$), если у однородного уравнения отсутствуют нетривиальные решения из $L_p(x,\infty)$, ($p=1,2$). Последнее можно доказать по образцу [5]. В самом деле, пусть при каком-либо x однородное уравнение

$$h(y) + \int_x^\infty F^{+}(y,t) h(t) dt = 0,\, y > x . \tag{31}$$

имеет нетривиальное решение из $L_2(x,\infty)$. В силу вещественности $F^{+}(x,y)$, можно считать, что $h(y)$ является вещественным. Тогда верно равенство

$$\int_x^\infty |h(y)|^2 dy + \int_x^\infty \int_x^\infty F^{+}(y,t) h(t) dt\; h(y) dy = 0 .$$

Подставляя в последнее равенство вместо функции $F^{+}(x,y)$ ее выражения (27), получаем

$$\int_x^\infty |h(y)|^2 dy + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\left|\frac{t(\lambda)}{2}\right|^2 - 1\right)\left(\int_x^\infty f_0^{+}(t,\lambda) h(t) dt\right)\left(\int_x^\infty f_0^{+}(y,\lambda) h(y) dy\right) d\lambda = 0 .$$

В силу формулы разложения (21) имеем

$$\int_x^\infty |h(t)|^2 dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_x^{\pm\infty} h(t) f_0^{+}(t,\lambda) dt\right)^2 d\lambda .$$

Два последних соотношения приводят нас к равенству

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{t(\lambda)}{2}\right|^2\left|\int_x^{\infty}h(t)f_0^+(t,\lambda)dt\right|^2 d\lambda=0,$$

откуда следует, что $\int_x^{\infty}h(t)f_0^+(t,\lambda)dt\equiv 0$. Следовательно, $h(y)=0$, т.е. однородное уравнение имеет лишь тривиальное решение в $L_2(x,\infty)$.

Единственность решения в $L_1(x,\infty)$ вытекает из того, что любое решение $h(y)$ уравнения (29) из $L_1(x,\infty)$ принадлежит $L_2(x,\infty)$. Действительно, в силу условия II имеем

$$\left|\int_x^{\infty}\int_x^{\infty}\left|h(t)h(y)\right|\left|\int_x^{\infty}F^+(t,z)F^+(z,y)dz\right|dtdy\right|\le$$

$$\le\sup_{z\ge x,y\ge x}\left|F^+(z,y)\right|\left|\int_x^{+\infty}\sup_{t\ge x,}\left|F^+(t,z)\right|dz\right|\left\|h(y)\right\|^2_{L_1(x,\infty)}.$$

Тогда из уравнения (32) следует, что

$$\left\|h(y)\right\|^2_{L_2(x,\infty)}\le\sup_{z\ge x,y\ge x}\left|F^+(z,y)\right|\left|\int_x^{+\infty}\sup_{t\ge x}\left|F^+(t,z)\right|dz\right|\left\|h(y)\right\|^2_{L_1(x,\infty)}.$$

Теорема доказана.

Доказанные выше теоремы позволяют решить обратную задачу по следующему алгоритму.

Алгоритм. Пусть дан коэффициент отражения $r(\lambda)$.

Шаг 1. При помощи формулы (27) строим коэффициент прохождения $a(\lambda)$.

Шаг 2. По формуле (28) определим функцию $F^+(x,y)$.

Шаг 3. Решив основное уравнение (29) найдем функции $K^+(x,y)$.

Шаг 4. Потенциал $p(x)$ восстановим по формуле (17).

Литература

1. Ahmadova A.R., On the inverse problem of Scattering Theory for the Perturbed Starks equation on a Semi axis, Georgian Mathematical Journal, Vol.3, No.22, 2015, pp.295-304.

2. Krejcirik D., Siegl P., Tater M., Viola J., Pseudaspectra in non–Hermitian quantum mechanics, J. Math.Phys., Vol.56, 2015, pp.503–513.

3. Yishen Li, One special inverse problem of the second order differential equation on the whole real axis, Chin. Ann. of Math., Vol.2, No.2, 1981, pp.147-155.
4. Абрамович М. , Стиган И., Справочник по специальным функциям, М.:, Наука, 1979.
5. Буслаев В.С., Дмитриева. Л.А., Блоховский электрон во внешнем поле. Алгебра и Анализ, т.1, №2, 1989, с.1–29.
6. Гасымов М.Г., Мустафаев Б.А., Обратной задача рассеяния для ангармонического уравнения на полуоси, ДАН СССР, т.228, №1, 1976, сс.321-323.
7. Калоджеро Ф., Дегасперис А., Спектральные преобразования и солитоны, М.: Мир, 1985, 472 с.
8. Марченко В.А., Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения, Киев, Наукова Думка, 1977, 330 с.
9. Савчук А.М., Шкаликов А.А., Спектральные свойства комплексного оператора Эйри на полуоси, Функц. анализ и его прил., Vol.51, No.1, 2017, с.82–98.
10. Титчмарш Э.Ч., Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, Москва, т.1, 1960.
11. Фадеев Л. Д., Обратная задача квантовой теории рассеяния, Успехи Матем. Наук, т.14, № 4(88), 1959, с.57–119.
12. Фадеев Л.Д., Свойства S-матрицы одномерного уравнения Шредингера, Тр.МИАН СССР, т.3, 1964, с.324-336.

Əlavə xətti potensiala malik olan Şredinger operatoru üçün səpilmənin tərs məsələsi

H.M.Hüseynov, A.F.Məmmədova

XÜLASƏ

Bütün oxda əlavə xətti potensiala malik olan Sredinger tənliyi üçün səpilmənin tərs məsələsi öyrənilir. Çevirmə operatorlarının köməyilə sonsuzluqda müəyyən asimptotikalara malik olan həllər qurulmuşdur. Əksolunma əmsalının xassələri öyrənilmişdir. Tərs məsələnin əsas tənliyi tapılmışdır. Əsas tənlinin birqiymətli həll olunması isbat olunmuşdur.

Açar sözlər: Şredinger tənliyi, çevirmə operatorları, xətti potensial, əksolunma əmsalı, səpilmənin tərs məsələsi, əsas tənlik.

The inverse scattering problem for the one-dimensional Schrodinger operator with an additional linear potential

H.M.Huseynov, A.F.Mamedova

ABSTRACT

The inverse scattering problem for the Schrodinger equation with an additional linear potential on the whole axis is studied. Using the transformation operators special solutions with asymptotic behavior at infinity are constructed. The properties of the reflection coefficient are studied. Main equation of the inverse problem is obtained. The unique solvability of the main equation is proved.

Keywords: Schrodinger equation, linear potential, transformation operators, reflection coefficient, inverse scattering problem, main equation.